PUCP - Cálculo aplicado - Ecuación calor - Ejercicios resueltos

Recordemos:

• Contexto general de la ecuación de calor unidimensional:

Una varilla de L cm de longitud, con constante de difusividad térmica κ, con superficie lateral aislada, tiene una temperatura inicial de $f(x)$ grados centígrados en la posición x de la misma, $0 < x < L$. Sus extremos tienen temperatura constante igual a 0 grados centígrados.

• Problema 1: Escribir la ecuación diferencial (en derivadas parciales) que debe cumplir la función temperatura $u(x,t)$ de la varilla con las condiciones inicial y de frontera.

Solución:

Sea $u(x,t)$ la temperatura de la varilla en en la posición x y en el instante t. La ecuación diferencial que modela el contexto anterior es:

$$\kappa\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

donde $0 < x < L,\ t > 0$.

La condición inicial (temperatura inicial) es:

$$u(x,0) = f(x)$$

Las condiciones de frontera son:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

• Problema 2: Resolver la ecuación de calor dada en el Problema 1, esto es, hallar explícitamente la función temperatura $u(x,t)$.

Solución:

Por el método de separación de variables (como vimos en clase) sabemos que la función temperatura $u(x,t)$ que resuelve la ecuación de calor es:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)\kappa t},$$

donde las constantes B_n satisfacen

$$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Ejercicios resueltos:

1. Una varilla de π cm de longitud, con constante de difusividad térmica $\kappa = 0{,}05\ \text{cm}^2/\text{seg}$, con superficie lateral aislada, tiene una temperatura inicial de $9\operatorname{sen}(x)$ grados centígrados en la posición x de la misma, $0 < x < \pi$. Sus extremos tienen temperatura constante igual a 0 grados centígrados.

   a) Escriba la ecuación diferencial (en derivadas parciales) que debe cumplir la función temperatura $u(x,t)$ de la varilla con las condiciones inicial y de frontera.

   b) Halle $u(x,t)$.

   c) ¿Cuál será la temperatura en la posición $x = \frac{\pi}{4}$ después de 30 segundos?

   Solución:

(a) Sea $u(x,t)$ la temperatura de la varilla en el instante t en la posición x. La ecuación diferencial correspondiente al problema es

$$0{,}05\, u_{xx} = u_t,$$

donde $0 < x < \pi,\ t > 0$.
Condición inicial:

$$u(x,0) = f(x) = 9\,\text{sen}\,(x)$$

Condiciones de frontera:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0$$

(b) Usando el hecho de que $\kappa = 0{,}05$ y $L = \pi$, se tiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, \text{sen}\,(nx)\, e^{-n^2\, 0{,}05\, t},$$

donde las constantes B_n satisfacen

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 9\,\text{sen}(x)\,\text{sen}\,(nx)\,dx.$$

Integrando tenemos $B_n = 0$ si $n \neq 1$, y $B_1 = 9$.
Por tanto, concluimos que

$$u(x,t) = 9e^{-0{,}05t}\,\text{sen}(x).$$

(c) $u\left(\frac{\pi}{4}, 30\right) = \frac{9\sqrt{2}}{2}e^{-1{,}5}$ grados centígrados.

2. Una varilla de π cm de longitud, con constante de difusividad térmica $\kappa = 1$ cm^2/seg, con superficie lateral aislada, tiene una temperatura inicial de 100 grados centígrados en la posición x de la misma, $0 < x < \pi$. Sus extremos tienen temperatura constante igual a 0 grados centígrados.

   a) Escriba la ecuación diferencial (en derivadas parciales) que debe cumplir la función temperatura $u(x,t)$ de la varilla con las condiciones inicial y de frontera.

   b) Halle $u(x,t)$.

Solución:

(a) Sea $u(x,t)$ la temperatura de la varilla en el instante t en la posición x. La ecuación diferencial correspondiente al problema es

$$u_{xx} = u_t,$$

donde $0 < x < \pi,\ t > 0$.
Condición inicial:

$$u(x,0) = f(x) = 100$$

Condiciones de frontera:

$$u(0,t) = 0$$

$$u(\pi,t) = 0$$

(b) Tenemos,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}(nx)\, e^{-n^2 t},$$

donde las constantes B_n satisfacen

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 100 \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{200}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{200}{\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

En conclusión,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{\pi} \left(\frac{1-(-1)^n}{n} \right) \operatorname{sen}(nx)\, e^{-n^2 t},$$

donde $0 \leq x \leq \pi, \ t \geq 0$.

3. Una varilla de 2 cm de longitud, con constante de difusividad térmica $\kappa = 0{,}25$ cm^2/seg, con superficie lateral aislada, tiene una temperatura inicial de $-\operatorname{sen}(\pi x) + 4\operatorname{sen}(2\pi x)$ grados centígrados en la posición x de la misma, $0 < x < 2$. Sus extremos tienen temperatura constante igual a 0 grados centígrados.

   a) Escriba la ecuación diferencial (en derivadas parciales) que debe cumplir la función temperatura $u(x,t)$ de la varilla con las condiciones inicial y de frontera.

   b) Halle $u(x,t)$.

Solución:

(a) Sea $u(x,t)$ la temperatura de la varilla en el instante t en la posición x. La ecuación diferencial correspondiente al problema es

$$0{,}25\, u_{xx} = u_t,$$

donde $0 < x < 2, \ t > 0$.
Condición inicial:

$$u(x,0) = f(x) = -\operatorname{sen}(\pi x) + 4\operatorname{sen}(2\pi x)$$

Condiciones de frontera:

$$u(0,t) = 0$$
$$u(2,t) = 0$$

(b) Usando el hecho de que $\kappa = 1/4$ y $L = 2$, se tiene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{16} t},$$

donde las constantes B_n satisfacen

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^{L} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^{2} f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx.$$

Usando las relaciones de ortogonalidad de las funciones seno, se tiene

$$B_2 = -1$$

$$B_4 = 4$$

y

$$B_n = 0 \quad n \neq 2, 4.$$

Concluimos así que la solución es

$$u(x,t) = -\operatorname{sen}(\pi x)\, e^{-\frac{\pi^2}{4} t} - \operatorname{sen}(2\pi x) e^{-\pi^2 t}.$$

Ecuación diferencial (de calor) $\quad 0,5\, u_{xx} = u_t$

Condiciones de frontera $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$

Condición inicial: $u(x,0) = f(x) = x(\pi - x)$.

Solución $u(x,t)$ es

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, e^{-\frac{n^2}{2}t} \operatorname{sen}(nx) \qquad \text{pues } L = \pi,\ k = 0,5 = \tfrac{1}{2}$$

donde

$$B_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

Así, usando el hecho de que:

- $$\int_0^{\pi} x \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{\pi}{n}(-1)^n = \frac{\pi}{n}(-1)^{n+1} \quad \text{(integ. por partes)}$$

- $$\int_0^{\pi} x^2 \operatorname{sen}(nx)\,dx = -\frac{x^2}{n}\cos(nx)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n} 2x\,dx$$
$$= -\frac{\pi^2}{n}(-1)^n + \frac{2}{n}\left[\frac{1}{n}\cdot \frac{\cos(nx)}{n}\Big|_0^{\pi}\right]$$
$$= \frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)$$

Tenemos así,

$$B_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{\pi^2}{n}(-1)^{n+1} - \frac{2}{n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right)$$

$$\Rightarrow B_n = \frac{4}{\pi n^3}\left(1 - (-1)^n\right).$$

Por tanto,

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\left[1 - (-1)^n\right] \cdot e^{-\frac{n^2}{2}t} \operatorname{sen}(nx)}$$

Evaluando en $x = \pi/2$, $t=2$, tenemos

$$u\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\left[1-(-1)^n\right] e^{-n^2} \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$ si n es par y $\operatorname{sen}\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k$

se tiene:

$$u\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^3}\left[1-(-1)^{2k+1}\right] e^{-(2k+1)^2}(-1)^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k+1)^3}(2)\, e^{-(2k+1)^2}(-1)^k$$

$$\Rightarrow \boxed{u\left(\frac{\pi}{2}, 2\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi}\cdot\frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} e^{-(2k+1)^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{8}{\pi}}$$